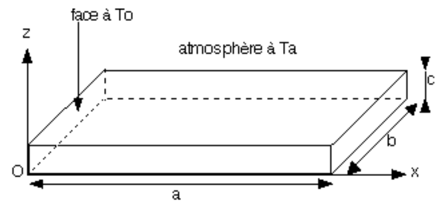
Ailette d'un radiateur

Un moteur (ou une carte mère d'ordinateur) dégage une puissance thermique Φ qui doit être évacuée pour que la température de fonctionnement ne dépasse pas un maximum T_{max} ; dans ce but on utilise un radiateur, modélisé par une ailette unique, c'est-à-dire une plaque parallélépipédique collée par sa face $x = 0$ au moteur de température $T_0 < T_{max}$. Cette plaque de conductivité thermique λ est en contact par ses autres faces avec l'atmosphère de température T_a. On étudie le régime stationnaire. On suppose, en guise de première approche, que la température ne dépend que de x et que $T(0) = T_0$. A la surface du métal se forme une mince couche limite d'air où la température varie rapidement de $T(x)$ à la température ambiante T_a ; pour alléger l'étude, on modélise le phénomène par une discontinuité de température et l'on admet qu'une surface élémentaire d'aire $\mathrm{d}S$ à l'interface métal/air transfère un flux thermique $h\,\mathrm{d}S\,(T(x) - T_a)$ où h est un coefficient constant. Voir la figure ci-dessous qui précise les dimensions de l'ailette :



Question 1 :

Faire un bilan énergétique pour une tranche de plaque entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$ et en déduire une équation différentielle vérifiée par $T(x)$

En régime permanent, l'énergie interne de la tranche étudiée est constante ($\mathrm{d}U = 0$) et puisqu'il s'agit d'un solide indéformable, le travail échangé est nul ($\delta W = 0$) ; le premier principe permet d'affirmer que la chaleur totale reçue est nulle ($\delta Q = 0$). celle-ci est échangée entre la tranche et l'extérieur par ses six faces :

- La face d'abscisse x, de surface $S_1 = b\,c$ à travers laquelle le métal reçoit $\delta Q_1 = S_1\,j_1 = -\lambda\,b\,c\,\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_x$ d'après la loi de Fourier
- La face d'abscisse $x + \mathrm{d}x$, de surface $S_2 = S_1 = b\,c$ à travers laquelle le métal perd donc reçoit algébriquement $\delta Q_2 = -S_2\,j_2 = \lambda\,b\,c\,\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x+\mathrm{d}x}$
- Les quatre autres faces, deux de surface $S_3 = b\,\mathrm{d}x$ et deux de surface $S'_3 = c\,\mathrm{d}x$ à travers lesquelles le métal perd donc reçoit algébriquement $\delta Q_3 = -h\,(2\,S_3 + 2\,S'_3)\,(T(x) - T_a)$ soit $\delta Q_3 = -2\,h\,(b + c)\,(T(x) - T_a)\,\mathrm{d}x$

La somme est nulle donc

$$\lambda\,b\,c\left(\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x+\mathrm{d}x} - \left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_x\right) - 2\,h\,(b+c)\,(T(x) - T_a)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\lambda\,b\,c\,\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x - 2\,h\,(b+c)\,(T(x) - T_a)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\lambda\,b\,c\,\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = 2\,h\,(b+c)\,(T(x) - T_a)$$

$$\ell^2\,\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = T(x) - T_a \qquad \text{(équation 1)}$$

en notant

$$\ell^2 = \frac{\lambda\,b\,c}{2\,h\,(b+c)}$$

Question 2 :

On suppose a grand devant ℓ de sorte qu'on puisse considérer l'ailette comme infinie et imposer $T(\infty) = T_a$. Etablir l'expression de $T(x)$. En pratique comment un industriel choisit-il a ?

L'équation 1 admet comme une solution particulière constante égale à T_a et l'équation homogène associée une combinaison linéaire d'exponentielles en $\exp(\pm x/\ell)$. La température doit converger vers T_a quand x croît infiniment, la constante devant l'exponentielle croisante est donc nulle ; enfin la condition $T(0) = T_0$ conduit à

$$T(x) = T_a + (T_0 - T_a)\, \exp\left(-\frac{x}{\ell}\right)$$

En pratique, une ailette de longueur infinie est quelque peu encombrante et on se contente d'une longueur a égale à environ $5\,\ell$ (5 est l'arrondi supérieur de $ln 100$) car pour $x > a$ on a $T(x) \approx T_a$ à mieux de 1% et l'ailette n'évacue quasiment plus rien.

Question 3 :
Calculer le flux thermique total Φ évacué par l'ailette en fonction des constantes du problème. En l'absence d'ailette justifer que le flux serait $\varphi = h\, b\, c\,(T_0 - T_a)$. Exprimer l'efficacité de l'aillette définie par $\eta = \Phi/\varphi$. Conclure sur la forme à donner à l'ailette.

Plutôt qu'intégrer δQ_3 défini plus haut entre $x = 0$ et $x = \infty$, il est plus simple de remarquer qu'en régime permanent, l'ailette évacue intégralement par ses côtés ce qu'elle reçoit en $x = 0$, d'où

$$\Phi = S_1\, J_1(0) = -\lambda\, b\, c\, \left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_0$$

or

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\frac{T_0 - T_a}{\ell}\, \exp\left(-\frac{x}{\ell}\right)$$

d'où

$$\Phi = \frac{\lambda\, b\, c\,(T_0 - T_a)}{\ell}$$

En l'absence d'ailette, la surface S_1 aurait transmis un flux selon la loi donnée en introduction, soit, en $x = 0$ où $T(0) = T_0$,

$$\varphi = h\, S_1\,(T_0 - T_a) = h\, b\, c\,(T_0 - T_a)$$

On en déduit aisément l'efficacité, en reportant l'expression de ℓ

$$\eta = \frac{\Phi}{\varphi} = \frac{\lambda}{h\,\ell} = \sqrt{\frac{2\,\lambda\,(b+c)}{h\, b\, c}}$$

Pour un métal donné, où λ et h sont donnés, on peut jouer sur la forme via b et c, on réécrit donc

$$\eta = \sqrt{\frac{2\,\lambda}{h}}\,\sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

on a donc intérêt à ce que, **pour une implantation sur le moteur donnée donc pour un produit $b\,c$ donné**, la somme $\frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ soit la plus grande possible, on réalise cet objectif en donnant à l'ailette la forme d'une plaque mince ($c \ll b$).